TD 7 : Fonctions usuelles

Fonctions puissances, exponentielle, etc.

1 ★★☆ Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$. Par une étude de fonction, montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner la valeur du minimum ainsi que le ou les points en lesquels il est atteint.

2 ★★ Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

1) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.
2) $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ en 0^+.
3) $x \mapsto \ln|x| \times e^{\frac{1}{x}}$ en $-\infty$.
4) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0^+.
5) $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(1+e^x)$ en $+\infty$.
6) $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^3}\right) \times \ln x$ en 0^+.

3 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1) $2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leqslant 0$
2) $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geqslant 0$
3) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

4 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 10 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$$

Fonctions trigonométriques

5 ★★ Simplifier les expressions suivantes :

1) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)\right)$
3) $\cos(2\arccos x)$
4) $\cos(2\arcsin x)$
5) $\tan(2\arctan x)$
6) $\sin(2\arctan x)$
7) $\cos^2(\arctan x)$
8) $\tan(\arcsin x)$

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\operatorname{sh}(kx)$

7 ★★

1) Montrer que la fonction $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection. On notera argsh sa bijection réciproque.
2) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction argsh.
3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

8 ★★ On souhaite montrer de deux façons différentes l'identité :

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

1) On pose $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$. Dériver f et en déduire le résultat voulu.
2) (a) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin y$.
   (b) En déduire le résultat voulu.

9 ★★ Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Obtenir une formule similaire pour $x \in \mathbb{R}_-^*$.

10 ★★☆ Soit $a, b \in D_{\tan}$ tels que $a+b \in D_{\tan}$.

1) Rappeler la formule qui exprime $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$.
2) En déduire $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

11 ★★★☆

1) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?
2) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{sh}(x)) = e^x$?

12 ★★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\arccos x = \arcsin(2x)$

2) $\arctan(2x) = \arcsin x$

3) $\arcsin(\tan x) = x$

4) $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$

5) $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \dfrac{\pi}{3}$